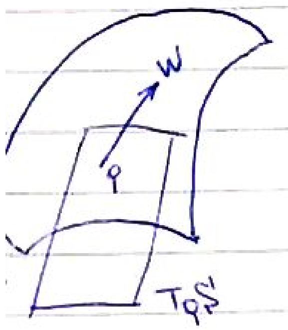
Δευτέρα 25/11/2019

ΠΡΩΤΗ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΜΟΡΦΗ.



$I_p: T_pS \to \mathbb{R}$

$I_p(w) = \|w\|^2 = \langle w, w\rangle$.

$X: U \to S$, $(u,v)\in U$

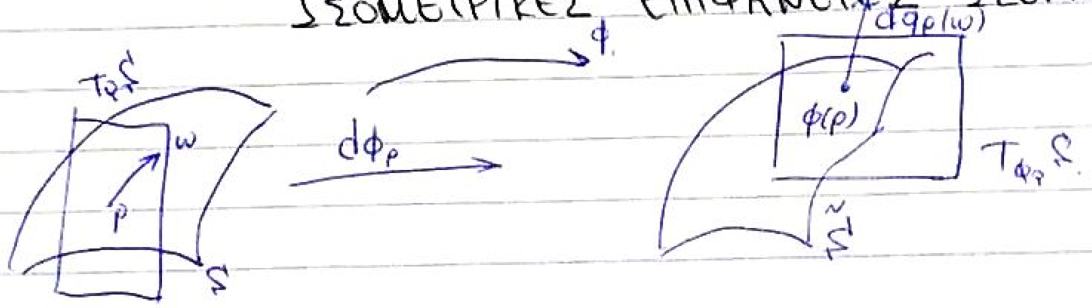
$E = \|X_u\|^2$

$F = \langle X_u, X_v\rangle$

$G = \|X_v\|^2$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

ΙΣΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ - ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ

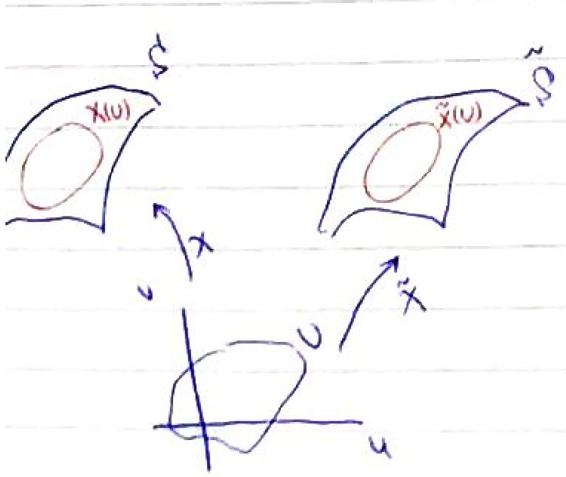


$\phi: S \to \tilde S$ καλείται ισομετρία αν-ν

1) Η ϕ είναι διαφορ/μος

2) $\tilde I_{\phi(p)}(d\phi_p(w)) = I_p(w) \iff \langle d\phi_p(w_1), d\phi_p(w_2)\rangle_{\phi(p)} = \langle w_1, w_2\rangle_p$.

ΠΡΟΤΑΣΗ $X: U \to S$, $\tilde X: U \to \tilde S$



Η απεικόνιση $\tilde X \circ X^{-1}: X(U) \to \tilde X(U)$ είναι ισομετρία αν-ν $E = \tilde E$, $F = \tilde F$, $G = \tilde G$.

ΑΛΥΣΟΕΙΔΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

$$x^2+y^2=a^2\cosh^2\frac{z}{a}, \quad a>0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\cosh\frac{z}{a}}\right)^2+\left(\frac{y}{\cosh\frac{z}{a}}\right)^2=a^2$$

Θέτω $x=a\cosh\frac{z}{a}\cos u$

$y=a\cosh\frac{z}{a}\sin u$

$z=av$

Ορίζω την απεικόνιση $X: U\subset\mathbb{R}^2 \to S$

$X(u,v)=(a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, av)$

$U=(0,2\pi)\times\mathbb{R}$

X είναι σύστημα συντεταγμένων

$X_u(u,v)=(-a\cosh v\sin u, a\cosh v\cos u, 0)$

$X_v(u,v)=(a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, a)$

$E(u,v)=\|X_u(u,v)\|^2=a^2\cosh^2 v$

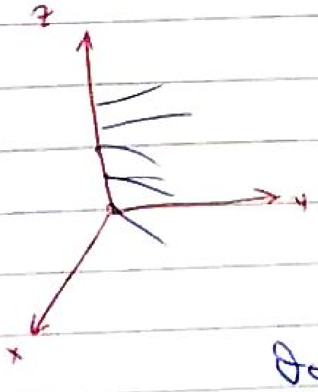
$F(u,v)=\langle X_u(u,v), X_v(u,v)\rangle=0$

$G(u,v)=\|X_v(u,v)\|^2=a^2\sinh^2 v+a^2=a^2\cosh^2 v$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}=a^2\cosh^2 v\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ΙΣΧΥΕΙ $\boxed{\cosh^2-\sinh^2=1}$

ΕΛΙΚΟΕΙΔΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ



$x\sin\frac{z}{a}=y\cos\frac{z}{a} \Leftrightarrow \frac{\sin\frac{z}{a}}{y}=\frac{\cos\frac{z}{a}}{x}=\frac{\lambda}{N}$

Είναι κανονική επιφάνεια.

$x=\tilde{v}\cos\frac{z}{a}=\tilde{v}\cos\tilde{u}$

$y=\tilde{v}\sin\frac{z}{a}=\tilde{v}\sin\tilde{u}$

$z=a\tilde{u}=a\tilde{u}$

Θεωρώ την $\tilde{X}:\tilde{U}\to\tilde{S}$, $\tilde{X}(\tilde{u},\tilde{v})=(\tilde{v}\cos\tilde{u},\tilde{v}\sin\tilde{u},a\tilde{u})$

$\tilde{X}$ είναι σύστημα συντεταγμένων

$\tilde{X}(\tilde{u}=\text{σταθ.},\tilde{v})=(0,0,a\tilde{u})+\tilde{v}(\cos\tilde{u},\sin\tilde{u},0)$ ευθείες

$\tilde{X}(\tilde{u},\tilde{v}=\text{σταθ.})=$ κυλινδρικές έλικες

$\tilde{E}(\tilde{u},\tilde{v}) = \tilde{v}^2 + a^2$, $\tilde{F}(\tilde{u},\tilde{v}) = 0$, $\tilde{G}(\tilde{u},\tilde{v}) = 1$

$$\tilde{v}^2 + a^2 = a^2\cosh^2 v \Leftrightarrow \tilde{v}^2 = a^2(\cosh^2 v - 1) \Leftrightarrow \tilde{v}^2 = a^2\sinh^2 v$$

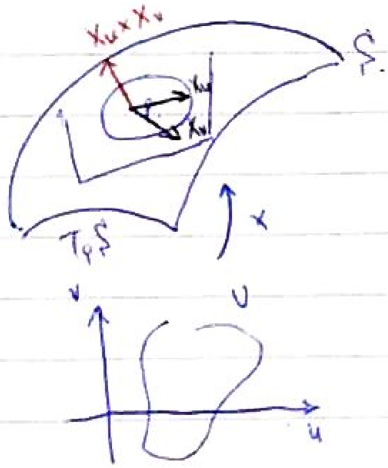
$$\begin{cases} \tilde{v} = a\sinh v \\ \tilde{u} = u \end{cases} \Leftrightarrow (\tilde{u},\tilde{v}) = \varphi(u,v) = (a\sinh v, u)$$

$$\tilde{X}(\tilde{u},\tilde{v}) = \tilde{X}(\varphi(u,v)) = \tilde{X}\circ\varphi(u,v)$$

Άρα $\bar{X} = \tilde{X}\circ\varphi$ σύσταμα συντ/μένων φ διαφ/μος.

$$\bar{X}(u,v) = \tilde{X}(\varphi(u,v)) = \tilde{X}(a\sinh v, u) = (a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, au)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{X}_u(u,v) &= (-a\sinh v\sin u, a\sinh v\cos u, a) \\ \bar{X}_v(u,v) &= (a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, 0) \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} \bar{E}(u,v) &= a^2 + a^2\sinh^2 v \\ \bar{F}(u,v) &= 0 \\ \bar{G}(u,v) &= a^2\cosh^2 v \end{aligned}$$



Το διάνυσμα $\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u,v)$ είναι μοναδιαίο κάθετο στο $T_{X(u,v)}S$.

$N: X(U) \to \mathbb{R}^3$

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|^2}(X^{-1}(p))$$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1}$$